МЭМ10_4

21б

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год

ЗАДАНИЯ

10 класс

1. По кругу расставлены 2023 числа. Если сложить любые два соседних числа, то сумма окажется положительной, но при этом сумма всех записанных чисел отрицательна. Верно ли, что произведение всех чисел положительно?

2. Доказать, что число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n.

3. В прямоугольном параллелепипеде $3 \times 4 \times 5$ произвольно выбрана пара точек. Может ли оказаться, что одна из этих точек является центром шара с радиусом 8, а другая лежит на его поверхности?

4. Какое из двух чисел больше: $200020012002^{200020012003}$ или $200020012003^{200020012002}$?

5. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час.

ШИФР МЭМ10-4

№1. Для того чтобы сумма всех чисел была отрицательной, нужно для каждого положительного числа своя отрицательная пара, которая при сложении давала бы 0, т.к. количество всех чисел является нечетным => 2023 по счету не будет иметь своей положительной пары, кроме соседней изначально стоявшей. Именно это отрицательное число делает сумму всех чисел отрицательной.

Если говорить про произведение чисел, то можно проследить, что, если для каждого числа своя пара => 1011 отрицательных и 1011 положительных чисел и одно отрицательное, не имеющий пары. => итог: 1012 отрицательных, т.к. количество отрицательных чисел является чётное число => все минусы взаимоуничтожаются и => произведение всех чисел будет положительно.

Ответ: утверждение верно, что произведение всех чисел положительно.

6б

№2 3 в любой степени будет давать в результате нечетное число. Если брать число, состоящее из количества любых одинаковых цифр 3^n степени, то можно проследить, что сумма всех цифр этого числа будет равна одному из чисел кратным 3.

Например: $3^2 = 9$, возьмем цифру 4

$$\frac{\overset{+}{\overbrace{444\ 444\ 444}}^{=12\cdot 3=36}}{9} \Rightarrow \frac{36}{9} = 4$$

возьмем цифру 3:

$$\frac{\overbrace{333\ 333\ 333}^{=27}}{9} \Rightarrow \frac{27}{9} = 3$$

4б

Видна закономерность, что в результате деления на 3^n, получается число равное цифре, из которых состоит первоначальное делимое число.

Доказано, что число составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n, т.к. является ему кратным.

№4.

Из двух чисел наибольшим будет являться число с наибольшей степенью. Числа отличаются на 1 единицу. Большим будет то число, у которого большая степень, вне зависимости того, что меньше другого на единицу, т.к. эту разницу покрывает возведение числа в степень на один раз больше. Это можно проверить, взяв четное число с нечетной степенью и нечетное последующее число с предыдущей четной степенью.

Например: ~~8^3 и 9^2~~ 4^5 и 5^4; $4^5=1024$, а $5^4=625 \Rightarrow 4^5>5^4$ 2б

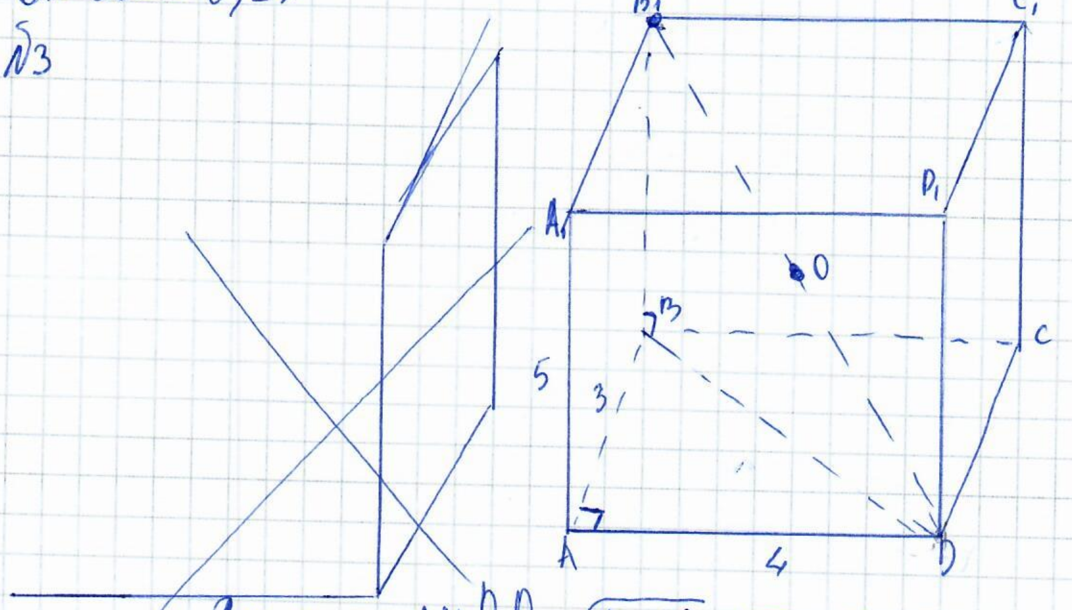
~~$8^3=512$, а $9^2=81 \Rightarrow 8^3>9^2$~~, так аналогично происходит и с другими парами чисел.

Ответ: $2000200012002^{2000200012003}$ является наибольшим числом

№5. Между отметкой 10 и 1 находится 3 часовых деления. Всего 12 делений $\Rightarrow$ вероятность того, что часовая стрелка застыла достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час равна $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0,25$ 7б

Ответ: 0,25

№3



2б

Рассмотрим $\triangle BAD$: $BD=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

Рассмотрим $\triangle B_1DB$: $B_1D=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}\approx\sqrt{49}\approx 7 \Rightarrow$ предположительно может быть диаметром окружности $\Rightarrow r\approx\frac{7}{2}\approx 3,5 \Rightarrow$ радиус шара не может быть равным 8

ШИФР МЭМ10-4

ШИФР МЭМ10_4