МЭМ9_17

185

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год

ЗАДАНИЯ

9 класс

1. Из произведения $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2022\cdot 2023$ исключили все четные сомножители и сомножители, делящиеся на 5. Чему равна последняя цифра числа, полученного перемножением оставшихся сомножителей?

2. Упростить выражение $f(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}}$, где $x>1$.

3. Существует ли прямоугольный треугольник, стороны которого выражались бы величинами $x^2, 2+x^2, 4+x^2$, где x – некоторое целое число?

4. Пусть x, y, z – неотрицательные действительные числа такие, что $x+y+z=1$. Доказать, что $0\leq xy+yz+xz-2xyz\leq\frac{7}{27}$.

5. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 5, 6, 7, 8?

ШИФР МЭМ9_17

1. ~~Если бы из произведения не исключали бы часть множителей, то умножение выполнялось бы 2022 раза~~ (~~1·2·3·4...2023~~). Были исключены чётные множители (1011 множителей). Т.к. общ. колич. множит. нечётное, количество нечётн на 1, ~~чётных = $\frac{\text{общ.колич.} - 1}{2}$ = 1011~~ чем чёт. => кол-во чёт. = $\frac{\text{общ.кол-во} - 1}{2} = \frac{2023-1}{2}$ = 1011 множ.

Также исключили множители ⋮5. Это числа 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95... 2020. Часть из них – чётные, они оканчиваются на 0 => => кратны 10 => кратны 2, т.к. 10 = 2·5. Мы хотим посчитать общее кол-во исключённых множителей. => нам не нужно считать чётные второй раз. Остаются множ. ⋮5, но ⋮̸2. Они заканчиваются цифрой 5: ~~5, 10, 15, 20~~; 5; 15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85; 95 и т.д.
В каждой сотне N чисел 10 оканчиваются цифрой 5 => в 2000 множителей их 200, а в 2023 множ. – 202. Теперь мы можем подсчитать общее кол-во исключённых множителей: ~~2023 − (1011+202)~~ = 1011+202 = 1213 (множ.). Значит, кол-во оставшихся = общ. − искл. = = 2023 − 1213 = 810 (множ) вот они: 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29 ... 2023. Мы видим, что их последние цифры повторяются: 1, 3, 7, 9 и т.д. => при умножении должна быть закономерность. 1·3 = 3; 3·7 = 21, ~~7·21~~ 21·9 = 189, 189·11 = 2079, 2079·13 = ...7 (Далее мы будем смотреть только на последнюю цифру) ...7·17 = ...9, ...9·19 = ...1, ...1·21 = ...1, ...1·23 = ...3, ...3·27 = = ...1, ...1·29 = ...9, ...9·31 = ...9, ...9·33 = ...7, ...7·37 = ...9, ...9·39 = ...1, ...1·41 = ...1, ...1·43 = ...3 и т.д.
Последовательность повторения последней цифры: 3, 1, 9, 9, 7, 9, 1, 1. У нас 810 множителей, => умножение выполняется 809 раз (1·3·7·9...2023). Мы видим, что посл. цифра повторяется на каждом 9-ом действии => при выполнении 809-го действия она повторится и будет равна первой цифре последовательности, то есть 3.

7б

Ответ: 3

Доказать: существует прямоугольный Δ, в котором стороны выраж. как x^2+4, x^2+2, x^2, где x – ~~целое~~ целое число

ШИФР МЭМ9-17

Доказательство:

3. Если Δ прямоугольный, то для него работает теорема Пифагора: $a^2=b^2+c^2$, где a – гипотенуза, b и c – катеты. Гипотенуза больше каждого из катетов, ~~она равна $4+x^2$~~, x^2 = неотр. число => гипотенуза $=4+x^2$, тогда катеты b и c равны $2+x^2$ и x^2.

составим уравнение:

$(4+x^2)^2=(2+x^2)^2+(x^2)^2$

$16+8x^2+x^4=4+4x^2+x^4+x^4$

$8x^2-4x^2+16-4=2x^4-x^4$

$-x^4+4x^2=-12 \mid \cdot(-1)$

$x^4-4x^2=12$

$x^4-4x^2-12=0$

Замена: $x^2=t$

$t^2-4t-12=0$

по т., обр. т. Виета:

$\begin{cases} t_1+t_2=4 \\ t_1\cdot t_2=-12 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} t_1=6 \\ t_2=-2 \end{array}\right.$

6б

Возврат к замене: $t=6=x^2$, т.к. $t=-2$ не удовл. усл. задачи => $x=\sqrt{t}=\sqrt{6}$

$\sqrt{6}^4-4(\sqrt{6})^2-12=0$

$36-24-12=0$

$0=0$, => такой треугольник существует

5. Любые 2 стороны Δ больше, чем 3-я. Предположим, что у нас равнобедр. Δ с 2 сторонами по 5 см и основанием 8. $5+5>8$. Мы взяли 2 наименьших стороны и наибольшую 3-ю => в остальных случаях правило также выполняется. I сторона Δ может быть равна 5, 6, 7, 8 см (4 варианта). В условии не говорится о том, что каждая сторона должна иметь другую длину, поэтому

ШИФР МЭМ9-17

на 2 и 3 месте также по 4 варианта. Если бы говорилось о том, что стороны не могут быть одной длины, то II сторона имела бы 3 варианта, а III сторона 2. Методом умножения мы бы получили общее кол-во Δ, равное $\underbrace{4}_{I\,ст}\cdot\underbrace{3}_{II\,ст}\cdot\underbrace{2}_{III\,ст}=24$, но такого условия нет, поэтому мы тем же методом умножения получаем $\underbrace{4}_{I\,ст}\cdot\underbrace{4}_{II\,ст}\cdot\underbrace{4}_{III\,ст}=64$ ~~варианта~~ треугольника

Ответ: 64 треугольника

5б

2. $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}}$, $x>1$

По усл. $x>1 \Rightarrow \sqrt{x^2}=x$, т.к. $-x$ не удовл. условию задачи

$f(x)=\dfrac{x^2+4x-5+(x-5)(x-1)}{x^2-4x-5+(x+5)(x-1)}=$

$=\dfrac{x^2+4x-5+x^2-x-5x+5}{x^2-4x-5+x^2-x+5x-5}=$

$=\dfrac{2x^2-2x}{2x^2}=\dfrac{2x(x-1)}{2x\cdot x}=\dfrac{x-1}{x}$

Ответ: $\dfrac{x-1}{x}$

0б

4. Дано: $x+y+z=1$, $x;y;z$ – неотр. действ. числа

Доказать: $0\le xy+yz+xz-2xyz\le\dfrac{7}{27}$

Док-во:

$0\le(x-y+z)^2\le\dfrac{7}{27}$

0б

$x+y+z=1$, $x;y;z$ неотр. действ. числа, $\Rightarrow$ ~~$x-y+z$~~ $0\le x-y+z<1 \Rightarrow$ ~~$(x-y+z)^2$~~ $0\le x-y+z<\dfrac{28}{102}$

ШИФР МЭМ9_17